１．１変数関数の最大・最小

１変数関数の最大・最小問題を考えるとき，以下の４つが基本である。

(i)　２次関数

２次関数は平方完成すればよい。
おきかえをすることによって２次関数に帰着できる場合もある。

例１

関数 $y=x^2-4x+7$ について
$y=(x-2)^2+3$ と変形できるので，$x=2$ のとき最小値は 3 である。

例２

関数 $y=\sin^2 x-4\sin x+7$ について
$\sin x=t$ とおくと $-1\leqq t\leqq 1$ であり，$y=(t-2)^2+3$ と変形できるので，
最大値は 12，最小値は 4 である。

(ii)　三角関数

三角関数は２倍角（半角）の公式，合成，和と積の変換公式などを用いるとよい。
おきかえると２次関数に帰着される場合や微分するほうがよい場合もあり，見極めが必要である。

例３

関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ について
$y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ と変形できるので，最大値は 2，最小値は -2 である。

例４

関数 $y=\sin^2 x+\sin x\cos x+2\cos^2 x$ について

半角の公式を用いたあと合成をすることによって

$$y=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x+(1+\cos 2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}$$

と変形できるので，最大値は $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$，最小値は $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$ である。

（iii）　相加平均と相乗平均の関係の利用

２つの関数がともに正の実数値のみをとり，積が定数となるときに用いられる。

例５

$x>0$ のとき，関数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ について

$x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$y=x+\dfrac{1}{x}\geqq\ 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ であり，等号は $x=\dfrac{1}{x}$ より $x=1$

であるから $x=1$ のとき，最小値は 2 である。

例５について，等号が成立する x の値の存在を確認して最小値 2 が確定する。

これがないと「2 未満の値はとらない」ということが示されているだけである。

（iv）　微分

考え方としては最も簡単なものである。

微分をして増減を調べることによって最大値や最小値を求めることができる。

実際に使うことはほとんどないが,

２次関数でも微分によって最大値や最小値を求めることができる。

２．２変数関数の最大・最小

２変数関数の最大・最小問題を考えるとき，以下の２つが基本である。

(i)　1 変数消去
条件式が与えられているときは 1 変数を消去すればよい。

例 6
$x-2y=3$ のとき，関数 x^2+y^2 について
$x=2y+3$ より $x^2+y^2=(2y+3)^2+y^2=5\left(y+\dfrac{6}{5}\right)^2+\dfrac{9}{5}$ であるから
$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$ のとき，最小値 $\dfrac{9}{5}$ である。

(ii)　1 変数固定
条件式が与えられていないときは 1 変数を固定すればよい。

例 7
関数 $x^2-4xy+7y^2-4y+3$ について
y を固定して x の関数と考えると

$$x^2-4xy+7y^2-4y+3=(x-2y)^2+3y^2-4y+3$$

と変形できるから，最小値は $x-2y=0$ のとき，$3y^2-4y+3$ となる。
次に，この最小値について y の関数と考えると

$$3y^2-4y+3=3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$$

と変形できるから，$(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ のとき，最小値 $\dfrac{5}{3}$ である。

２変数 $x,\ y$ の条件式は座標平面上の軌跡や領域と考えることができるので，図形の共有点が存在する条件から解答を導くこともできる。
例 6 の場合，$x^2+y^2=k$ とおいて，直線 $x-2y=3$ と円 $x^2+y^2=k$ が共有点をもつような k の値の範囲を求めることによって最小値を導くことができる。

３．方程式

方程式の解を求める問題と方程式の実数解の個数を求める問題などがある。

(i)　方程式の解を求める問題

積の形を作ることで解けることが多い。２次方程式であれば解の公式を用いてもよい。
複素数解であればド・モアブルの定理などを用いて解ける場合もある。

例８
方程式 $x^3-7x+6=0$ について
因数定理を用いて $(x-1)(x-2)(x+3)=0$ と変形できるので，
解は $x=1,\ 2,\ -3$ である。

例９
方程式 $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$ について
和と積の変換公式を用いて $\cos x+\cos 5x=2\cos 3x\cos 2x$ と変形できるので，
$\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0 \iff \cos 3x(2\cos 2x+1)=0$ より
$\cos 3x=0,\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}$ を満たす x の値を指定された変域に応じて答えればよい。

例１０
方程式 $z^8=1$ について
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ とおくと $z^8=r^8(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)$ より
$r=1,\ \theta=\dfrac{k\pi}{8}$ (k は整数) となるので，$z=\pm1,\ \pm i,\ \dfrac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$ (複号任意) である。

(ii)　方程式の実数解の個数を求める問題

　方程式 $f(x)=0$ の実数解 $\iff$ 曲線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標
　方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解 $\iff$ 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点の x 座標
などの性質を利用するために，増減を調べたりグラフをかいたりするとよい。
２次方程式であれば判別式によって調べることもできる。

例１１

a を定数とするとき，方程式 $\log x = ax$ の実数解の個数について
$x > 0$ であるから $\dfrac{\log x}{x} = a$ と変形して，
$y = \dfrac{\log x}{x}$ と x 軸に平行な直線 $y = a$ の共有点の個数を調べればよい。
このとき，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることに注意を要する。

例１２

a を定数とするとき，方程式 $\sin^2 x - \sin x = a \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について，
$y = \sin^2 x - \sin x$ の増減を調べて $y = a$ との共有点の個数を考えてもよいが，
$\sin x = t$ とおきかえて２次方程式 $t^2 - t = a$ の実数解の個数を考えることもできる。
ただし，２次方程式の解 t の値によって対応する x の値の個数が異なるように，
合成関数を考えるときには注意を要する。

(iii)　関数の値域を求める問題

方程式が実数解をもつ条件から関数の値域を求めることができる。

例１３

関数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ の値域について

$$y = x + \frac{1}{x} \iff x^2 - yx + 1 = 0$$

であるから，実数 x が存在する条件から

$$(\text{判別式}) = (-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \geqq 0$$

これを解いて $y \leqq -2,\ 2 \leqq y$ である。

たとえば，$y = 4$ のとき $x = 2 \pm \sqrt{3}$ であるが，これは
$x = 2 \pm \sqrt{3}$ のとき $y = 4$ という値になるということであり，また，
$y = 1$ のとき実数 x の値が存在しないので，$y = 1$ という値になることはない。
したがって，実数 x が存在するような y の条件を求めればよい。

４．不等式

不等式の解を求める問題や不等式の証明の問題などがある。

(i)　不等式の解を求める問題
グラフの利用が基本であるが，方程式と同様に積の形に変形したり，三角関数であれば単位円を利用したりすることで解けることが多い。導関数の符号変化を調べるときにも必要な考え方である。

例１４
不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)>0$ について
３次関数 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ のグラフを考えて $1<x<2,\ 3<x$ である。

例１５
$0 \leqq x<2\pi$ とする。不等式 $\sin 2x-\cos x>0$ について
$$\sin 2x-\cos x>0 \iff \cos x(2\sin x-1)>0$$
より，「$\cos x>0$ かつ $\sin x>\dfrac{1}{2}$」または「$\cos x<0$ かつ $\sin x<\dfrac{1}{2}$」であるから
単位円を用いると $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{6}<x<\dfrac{3\pi}{2}$ である。

(ii)　不等式の証明
$A>B$ の証明は $A-B>0$ を示すことが基本である。実数 a に対し $a^2 \geqq 0$ であること，相加平均と相乗平均の関係，関数の増減，平均値の定理などさまざまな性質を利用して証明することができる。

例１６
すべての実数 x に対して不等式 $x^2-4x+7>0$ が成り立つことについて
$(\text{左辺})=(x-2)^2+3$ であり，$(x-2)^2 \geqq 0$ より示される。

例１７

$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことについて

$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$f'(x)=e^x-1>0$ より $f(x)$ は単調増加。

さらに，$f(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき $f(x)>0$ すなわち $e^x>1+x$ である。

（iii）　定積分と不等式

次の性質を用いて不等式を証明することができる。

　　区間 $[a,\ b]$ で $f(x)\geqq\ g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geqq\int_a^b g(x)dx$

　　等号が成り立つのは，つねに $f(x)=g(x)$ のときに限る。

例１８

$0\leqq\ x\leqq\ 1$ のとき，$\dfrac{1}{x^2+1}\leqq\dfrac{1}{x^3+1}\leqq\ 1$ であるから，

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx<\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx<\int_0^1 dx$ が成り立つ。

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと，

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}$ であるから，

$\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx<1$ が成り立つ。

例１９

n を自然数とする。

k を自然数として，$k\leqq\ x\leqq\ k+1$ のとき，$\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{1}{x}$ であるから，

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ すなわち $\displaystyle\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ が成り立つ。

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ の場合を辺々加えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$

ここで，(右辺) $\displaystyle=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)$ であるから，

不等式 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$ が成り立つ。