

1. 数 (問題 1 ~ 1 1)
  - ・整数, 有理数, 無理数, 複素数の性質や計算
  - ・ $n$  進法
  
2. 整式 (問題 1 2 ~ 1 9)
  - ・整式の加減乗除と因数分解
  - ・二項定理
  - ・剰余の定理と因数定理
  - ・分数式の計算
  
3. 方程式・不等式 (問題 2 0 ~ 2 9)
  - ・判別式
  - ・解と係数の関係
  - ・高次方程式
  - ・不定方程式
  - ・1 次不等式
  - ・絶対値を含む方程式・不等式
  
4. 等式・不等式の証明 (問題 3 0 ~ 3 3)
  - ・恒等式
  - ・等式の証明
  - ・不等式の証明
  - ・相加平均と相乗平均
  
5. 集合と論理 (問題 3 4 ~ 3 9)
  - ・集合と集合の要素の個数
  - ・条件と集合
  - ・必要条件と十分条件
  - ・逆・裏・対偶
  - ・背理法

## 1. 数 (問題1～11)

自然数, 整数, 有理数, 無理数, 虚数, 複素数について理解しよう。

無理数の計算 (分母の有理化), 複素数の計算について理解しよう。

絶対値の定義とその性質, 余裕があれば合同式やガウス記号について理解しよう。

$n$  進法について理解しよう。

問題3は中学受験でも問われるような問題であり, 基礎の段階で考え方を理解しておくとうい。

問題4の合同式については教科書レベルではないが, 記号と使い方を覚えておくとうりに関する問題でまとめやすい。二項定理と関連させて理解してもよい。

$$\begin{aligned} \text{例: } 3^{20} &= (3^4)^5 = 81^5 = (80+1)^5 \equiv 1^5 = 1 \pmod{10} \text{ より} \\ 3^{20} &\text{ を } 10 \text{ で割ったときの余り (} 3^{20} \text{ の一の位) は } 1 \end{aligned}$$

問題7の対称式は無理数というテーマと関係ないが, 頻出なのでここで理解しておくとうい。

問題8のガウス記号は入試で頻出であるため, 性質を理解して慣れておくとうい。

$$\begin{aligned} \text{実数 } x \text{ に対して } x \text{ を超えない最大の整数を } [x] \text{ と表すとき, } n \text{ を整数とすると} \\ [x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] \leq x < [x]+1 \Leftrightarrow x-1 < [x] \leq x \\ \text{(右の2つはすぐに導けるので, 覚える必要はない。)} \end{aligned}$$

問題11の $n$ 進法は入試では頻出ではないがたまに見かける。 $n$ 進法から $m$ 進法への変換の方法は理解しておきたい。

## 2. 整式 (問題 12 ~ 19)

整式の加減乗除, 因数分解について理解しよう。

二項定理について理解しよう。

剰余の定理, 因数定理について理解しよう。

分数式の計算について理解しよう。

問題 12, 15 は速く計算するための工夫が大切である。

問題 16 は  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  の因数分解である。

問題 13 (1) (2) は一般項を用いた表現を確認しておくことが大切である。

問題 13 (3) は合同式を用いた表現も参考にしよう。

問題 14 は教科書レベルではないが, ときどき見られる問題なので理解しておくとうい。

素数  $p$ , 整数  $k$  に対し,  $1 \leq k \leq p-1$  を満たしているとき

$k {}_p C_k = p {}_{p-1} C_{k-1}$  が成り立つことから  ${}_p C_k$  は  $p$  の倍数

問題 17, 18 について, 剰余の定理と因数定理を導けるようにしておくとうい。

2 次方程式  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  の 2 解を  $\alpha, \beta$  とするとき,  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

であるから, 因数定理により  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

と変形できる。恒等式であるから, 係数を比較すれば解と係数の関係が得られる。

問題 19 の分数式の計算について, 部分分数分解は数列の和や積分の計算で用いられるので, 速く変形できるようにしておくとうい。

### 3. 方程式・不等式 (問題20～29)

解の公式，判別式，解と係数の関係について理解しよう。

高次方程式の解法について理解しよう。

ユークリッドの互除法，さまざまな不定方程式について理解しよう。

不等式の性質，1次不等式の解法について理解しよう。

絶対値を含む方程式・不等式の解法を理解しよう。

2次方程式の解と係数の関係に関連して，2文字の対称式について確認しておくとい。

問題22について，高次方程式は公式，置き換え，因数定理などを利用して因数分解をするとよい。

問題23について，(1)を利用して(2)を考える意図ではあるが，さまざまな解法を参考にするとよい。

問題24について，因数定理を用いた証明や3文字の対称式の確認をしておきたい。

問題25，26について，互除法を用いた不定方程式の解法を理解しよう。

問題27について，頻出であるものを中心に，さまざまな不定方程式の解法を理解しておきたい。

問題29(1)(2)について， $|x - a|$ は数直線上の $a$ からの距離と考えると容易である。

方程式 $f(x) = 0$ や不等式 $f(x) > 0$ などについては関数 $y = f(x)$ のグラフを考えることも大切である。

#### 4. 等式・不等式の証明 (問題30～33)

恒等式について理解しよう。

等式の証明方法について理解しよう。

不等式の証明方法について理解しよう。

相加平均と相乗平均について理解しよう。

恒等式と方程式の違いを確認しておくとうい。

等式の証明に関連して、比例式についても理解しておきたい。

正弦定理に比例式の性質を活用することができる。

不等式の証明について、両辺を平方(2乗)するときなど同値条件に注意しよう。

相加平均や相乗平均はどのようなときに使われる平均なのかを考えてみよう。

“相加平均－等差数列－1次関数”，“相乗平均－等比数列－指数関数” の関係を考えてみよう。

相加平均と相乗平均の関係(不等式)はどのようなときに使われるのかを理解しておきたい。

問題33に関連して、

$$x > 0, y > 0 \text{ のとき, } x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{y}} = 2\sqrt{\frac{x}{y}}, y + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{4}{x}} = 2\sqrt{\frac{4y}{x}} \text{ より,}$$

辺々かけて不等式  $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right) \geq 8$  が成り立つことは正しいが、

関数  $y = \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right)$  の最小値が8は誤っている理由を考えてみよう。

5. 集合と論理 (問題34～39)

集合, 集合の要素の個数について理解しよう。

命題, 条件について理解しよう。

必要条件と十分条件, 逆・裏・対偶について理解しよう。

背理法について理解しよう。

集合に関するさまざまな用語や記号を理解しておくとうい。

問題35について, 集合の要素の個数は教科書では「場合の数と確率」の範囲である。

命題, 条件, 反例などの用語の確認をしておくとうい。

問題36について, 条件と集合の関係について理解しておきたい。

問題37について, “かつ” と “または” の否定はド・モルガンの法則。

集合のド・モルガンの法則と合わせて図で理解するとよい。

問題38について, 必要条件と十分条件の定義を理解することも大切であるが, 真偽判定の考え方も身につけておきたい。

実数  $x, y$  に関する条件であれば, 座標平面上の点の集合 (軌跡・領域) で考えることもできる。

問題39について, 背理法がどのようなときに用いられるのかを理解しておきたい。

もとの命題と対偶命題の真偽が一致する根拠を理解しておくとうい。

条件  $p, q$  を満たすもの全体の集合をそれぞれ  $P, Q$  とするとき

「 $p$  ならば  $q$ 」が真  $\Leftrightarrow P \subset Q \Leftrightarrow \bar{Q} \subset \bar{P} \Leftrightarrow$  「 $\bar{q}$  ならば  $\bar{p}$ 」が真