

1. 図形の性質 (問題 5 7 ~ 6 5)

- ・ 三角形の角の二等分線と比
- ・ 三角形の外心・内心・重心
- ・ チェバの定理, メネラウスの定理
- ・ 円に内接する四角形
- ・ 接線と弦の作る角 (接弦定理)
- ・ 方べきの定理
- ・ 空間の直線と平面
- ・ 多面体

2. 三角比と三角関数 (問題 6 6 ~ 8 2)

- ・ 弧度法
- ・ 三角比と三角関数の定義
- ・ 三角関数の相互関係, 三角関数の性質
- ・ 三角関数のグラフ
- ・ 正弦定理, 余弦定理, 三角形の面積
- ・ 加法定理
- ・ 2 倍角の公式, 半角の公式
- ・ 三角関数の合成
- ・ 和と積の変換公式
- ・ 三角関数の最大・最小, 方程式・不等式

1. 図形の性質 (問題 57 ~ 65)

三角形の性質について理解しよう。

三角形の外心・内心・重心の定義と性質について理解しよう。

チェバの定理, メネラウスの定理について理解しよう。

円の性質について理解しよう。

方べきの定理について理解しよう。

空間の直線と平面について理解しよう。

多面体について理解しよう。

三角形と円に関する定理等の証明を理解することは中学校レベルの図形の知識の復習になるだろう。

問題 5 7, 5 8 について, 三角形の合同・相似, 平行線と比の性質を用いると証明できる。位置ベクトルの問題でよく用いられる性質である。

チェバの定理とメネラウスの定理の証明も理解しておくといよい。

円に内接する四角形の性質は, 円周角の定理を用いると証明できる。

円の接線に関する性質は, 直角三角形の合同を考えると証明できる。

接弦定理は, 円周角の定理などを用いると証明できる。

方べきの定理は, 三角形の相似を考えると証明できる。

問題 6 4 について, 三垂線の定理の証明を通して直線と平面の位置関係などを理解するとよいだろう。

問題 6 5 について, 正多面体の定義と特徴を理解しておくといよい。

教科書では作図についても触れられているが, 線分の垂直二等分線, 角の二等分線などの基本作図の確認をし, 分点の作図と長さの作図くらいは例題などを読んでおくといよいだろう。入試ではほとんど出題されていない。

## 2. 三角比と三角関数 (問題 6 6 ~ 8 2)

弧度法について理解しよう。

三角比と三角関数の定義について理解しよう。

三角関数の相互関係, 三角関数の性質について理解しよう。

三角関数のグラフについて理解しよう。

正弦定理, 余弦定理, 三角形の面積について理解しよう。

加法定理について理解しよう。

2 倍角の公式, 半角の公式, 和と積の変換公式を導けるようにしよう。

三角関数の合成について理解しよう。

問題 6 6 について, 弧度法について理解しておくといよい。

三角関数の微分・積分で役に立つ。弧度法を用いると次のようになる。

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$$

三角比の定義は相似な図形の性質を利用している。

座標を用いて一般角に拡張することで, 鈍角三角形についても考えることができる。

$y = \sin \theta$ ,  $y = \cos \theta$  などは  $\theta$  の関数であるから三角関数という。

定義と三平方の定理から次の関係式が得られる。

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

三角関数の性質は単位円をかいて考えるとよい。

頻出のものは自然に覚えられるし、そうでないものは必要に応じて導けばよい。

sin と cos を入れかえたいときは

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

を用いるとよい。(cos への合成でも使える。)

問題 6 9 について、三角関数のグラフそのものの出題は少ないが、周期や拡大・縮小、平行移動などは確認しておきたい。

関連事項として偶関数、奇関数の定義と性質についても理解しておくとうよいだろう。

偶関数  $\cdots f(-x) = f(x)$ ,  $y = f(x)$  のグラフは  $y$  軸に関して対称

奇関数  $\cdots f(-x) = -f(x)$ ,  $y = f(x)$  のグラフは原点に関して対称

正弦定理は三角比の定義と円に関する性質を用いて証明できる。

余弦定理は三角比の定義と三平方の定理を用いて証明できる。

余弦定理は座標を用いて証明することもできる。

また、正弦定理から

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

が成り立つ。

三角形の面積に関連して、余裕があればヘロンの公式の証明も理解しておきたい。

問題 7 3 について、2 平面のなす角は「図形の性質」の範囲である。

余裕があれば加法定理の証明も理解しておきたい。

問題 7 4 について、角を制限して余弦定理を用いた証明であるが、一般的な証明は場合分けを要する。一般的な証明の一つとして、回転させて 2 通りで表す方法がある。(NEW ACTION LEGEND にもまとめられている。)

問題 7 4 (2), 7 5 について、残りの定理の証明は文字を置き換えたり三角関数の性質を用いたりしている。

2直線のなす角に関する問題は、 $\tan$ の加法定理を用いる方法のほか、ベクトルの内積を用いて考えることもできる。

2倍角の公式、半角の公式、和と積の変換公式はすべて導けるようにしておきたい。

半角の公式は以下の形で用いられることが多い。(次数下げ)

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

また、積分の計算や方程式の計算などに用いられる。

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx, \quad \int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx$$
$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos 2x + \cos 3x = 0$$

方程式は積の形を作ることが基本的な考え方の一つである。

三角関数の合成は  $\sin$  だけではなく  $\cos$  へもできるようにしておきたい。

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right)$$

であるから、 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  として

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha \text{ とおくと } a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha \text{ とおくと } a \sin \theta + b \cos \theta = r \cos(\theta - \alpha)$$

となる。(加法定理を用いている)

最大・最小問題は置き換えをして2次関数などに帰着させたり、加法定理などの公式を用いて簡単な式にすることで考えることができる。微分をすることで最大・最小を考える問題もあるので、見極めが必要となる。頻出パターンがいくつかあるので、基本的な考え方を理解しておくといよい。

方程式・不等式の問題も頻出パターンがいくつかあるので、基本的な考え方を理解しておくといよい。前述したとおり、積の形を作ること意識しておきたい。