

1. 数列 (問題 92 ~ 102)

- ・ 等差数列, 等比数列
- ・ 和の記号 (Σ)
- ・ 階差数列
- ・ 和と一般項
- ・ いろいろな数列の和
- ・ 漸化式
- ・ 数学的帰納法

2. 数列の極限 (問題 103 ~ 108)

- ・ 数列の極限
- ・ 無限等比数列
- ・ 無限級数
- ・ 無限等比級数

1. 数列 (問題92～102)

等差数列, 等比数列の一般項と和について理解しよう。

和の記号 (Σ) の意味とその計算について理解しよう。

階差数列の定義について理解しよう。

和と一般項の関係について理解しよう。

いろいろな数列の和の計算について理解しよう。

いろいろな漸化式の解法について理解しよう。

数学的帰納法について理解しよう。

問題 9 2 (1) について、等差数列の定義を理解していないと証明できない。

問題 9 3 (2) について、等比数列の証明の考え方を理解しておくとうい。

3つの数 a, b, c がこの順に等差数列であるとき、 b は a, c の相加平均である。

$$b - a = c - b \Leftrightarrow 2b = a + c \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

3つの正の実数 a, b, c がこの順に等比数列であるとき、 b は a, c の相乗平均である。

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac \Leftrightarrow b = \sqrt{ac}$$

階差数列の性質を利用して Σ 公式を証明することができる。

和の公式の証明は入試でも出題されやすいので、考え方を理解しておくとういだろう。

問題 9 6 について、 $n = 1$ のときの扱いに注意を要する。

問題 9 7 (1) (2) について、

数列 $\{a_n\}$ に対して、 $a_n = b_{n+1} - b_n$ が成り立つとき、

$$\sum_{k=1}^n a_k = b_{n+1} - b_1$$

を利用している。

階差数列が $\{a_n\}$ となるような数列 $\{b_n\}$ を見つけることができれば、与えられた数列 $\{a_n\}$ の和をかんたんに求めることができる。

入試でもよく見られる考え方で、ていねいに誘導されていることが多い。

問題 9 7 (3) について、「(等差数列) \times (等比数列)」の形をした数列の和の計算は、等差数列の階差が定数であることと“等比数列の和の公式”の証明の考え方が参考になる。この流れを理解していれば、やや難しいが「(2次式) \times (等比数列)」の形になっても応用できるはずである。

(2次式の階差は1次式であるから、 $S - rS$ の計算を2回くり返すとよい。)

基本的な漸化式は確実に理解しておきたい。

・ $a_{n+1} = a_n + d$ (d は定数) \Rightarrow 公差 d の等差数列であるから $a_n = a_1 + (n - 1)d$

・ $a_{n+1} = ra_n$ (r は定数) \Rightarrow 公比 r の等比数列であるから $a_n = a_1 r^{n-1}$

・ $a_{n+1} = a_n + f(n)$ \Rightarrow 階差数列が $f(n)$ であるから $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ ($n \geq 2$)

・ $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 0, 1, q \neq 0$)

$\Rightarrow \alpha = p\alpha + q$ を満たす α に対し, $\{a_n - \alpha\}$ は公比 p の等比数列

問題 100 について, 上記以外の漸化式については適切な変形をして上記の形にすることで一般項を求めることができる。可能な範囲で典型的なパターンの解法を理解しておくとういだろう。

問題 101 について, 連立漸化式は確率などと融合されて出題されている。

問題 100 にも言えることであるが, 漸化式の解法を理解するだけではなく漸化式をつくることにも慣れておきたい。

数学的帰納法は自然数 n に関する命題 $P(n)$ がすべての自然数 n に対して真であることを示すときに用いられる。

基本的な証明の手順は以下の 2 つを示すことである。

・ $P(1)$ が真

・ $P(k)$ が真 $\Rightarrow P(k+1)$ が真

入試では次のパターンも出題されることがある。

・ $P(1), P(2)$ が真

・ $P(k), P(k+1)$ が真 $\Rightarrow P(k+2)$ が真

入試ではあまり見られないが, 余裕があれば次のパターンも理解しておくとういだろう。

・ $P(1)$ が真

・ $P(1), P(2), \dots, P(k)$ が真 $\Rightarrow P(k+1)$ が真

2. 数列の極限 (問題103～108)

数列の極限について理解しよう。

無限等比数列について理解しよう。

無限級数について理解しよう。

無限等比級数について理解しよう。

無限級数の収束と発散について理解しよう。

数列の極限を求めるためにさまざまな変形をするが、不定形を解消するためであることを理解しておきたい。

はさみうちの原理は極限を求めるときに入試でよく用いられる性質である。

問題105について、確率や図形などの問題で漸化式をつくり、一般項を求めたあとに極限值を求める問題は入試でよくみられる。

無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

の収束・発散は部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

について、数列 $\{S_n\}$ の極限を調べればよい。

初項 a 、公比 r の無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

の部分 and は $r \neq 1$ のとき

$$S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

である。

したがって、 $-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから、

このとき無限等比級数は収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$ である。

無限等比級数は微分法、積分法などの問題と融合されて頻出である。

問題108 (1) について、和と一般項の関係 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$) を利用して証明できる。