１．図形と方程式　（問題１０９～１２４）

・直線の方程式
・２直線の平行・垂直
・円の方程式
・円と直線の位置関係
・軌跡と領域

２．式と曲線　（問題１２５～１３４）

・２次曲線（放物線，楕円，双曲線）
・２次曲線と直線
・媒介変数表示
・極座標と極方程式

３．ベクトル　（問題１３５～１４４）

・ベクトルとその性質
・ベクトルの成分と内積
・位置ベクトル
・ベクトル方程式
・球面の方程式

４．複素数平面　（問題１４５～１５２）

・複素数平面
・複素数の極形式
・回転移動
・ド・モアブルの定理
・複素数平面上の図形

１．図形と方程式　（問題１０９～１２４）

直線の方程式について理解しよう。

２直線の平行条件と垂直条件について理解しよう。

円の方程式について理解しよう。

円と直線の位置関係について理解しよう。

円の接線の方程式について理解しよう。

軌跡の求め方について理解しよう。

不等式の表す領域について理解しよう。

線分の内分点・外分点などの座標を求める公式についてはベクトルで記憶すればよい。余裕があれば証明を理解しておくとよいだろう。（平行線と比の性質を用いる。）

問題１０９について，「座標を用いて」という指示があるが，このような指示がなければ，初等幾何，座標，ベクトル，複素数など，どの知識を用いると容易であるかを見抜く力も試される。

直線の“方程式”の意味を理解しておきたい。
直線 $y = 2x - 1$ とは，これをみたす点 $(x,\ y)$ の集合

$$L = \{(x,\ y) \mid y = 2x - 1\}$$

が直線をえがくという意味である。

２直線 $y = m_1x + n_1,\ y = m_2x + n_2$ に対して

２直線が平行 $\Leftrightarrow\ m_1 = m_2$，２直線が垂直 $\Leftrightarrow\ m_1m_2 = -1$

（$m_1 = m_2$かつ $n_1 = n_2$ のとき，２直線は一致）

垂直条件は三平方の定理によって証明できる。

２直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ に対して

２直線が平行 $\Leftrightarrow\ a_1b_2 - a_2b_1 = 0$，２直線が垂直 $\Leftrightarrow\ a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

こちらは軸に平行な直線も考えることができる。法線ベクトルの平行・垂直条件を考えると記憶しやすい。

点と直線の距離の公式はベクトルを用いて考えると容易に証明できる。

定点 $\mathrm{C}(a,\ b)$ からの距離が一定値 r である点 $(x,\ y)$ の軌跡は円であり，その方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

である。（三平方の定理から明らかである。）

円と直線の位置関係について，２次方程式の判別式を用いる考え方，円の中心と直線の距離を円の半径と比較する考え方があるが，問題によって使い分けることができるとよい。

円の接線の方程式については証明も理解しておきたい。半径と接線が垂直であることを利用するが，この考え方を理解しておけば中心が原点でなくても容易に接線の方程式を求めることができる。
（ベクトルを用いた考え方を理解すると「垂直→内積」で公式の記憶も容易になる。）

軌跡を求めるときは方程式の同値変形が重要である。特に媒介変数などの存在条件に注意を要する。

t を実数とするとき，$x=t^2,\ y=t^4$ を満たす点 $(x,\ y)$ の軌跡は放物線 $y=x^2$ ではない。$x=t^2$ を満たす実数 t の存在条件が $x \geqq 0$ であるから，放物線の一部 $y=x^2$ $(x \geqq 0)$ である。

問題１２１について，余裕があれば正領域・負領域についても理解しておくとよいだろう。

問題１２２について，不等式を条件とする２変数関数の最大・最小問題である。さまざまな解法の１つであり，教科書レベルの重要なものであるので理解しておきたい。

曲線の通過領域は教科書レベルではないが，入試でもよく見られるため，基本的な考え方は理解しておきたい。

問題１２３（１）について，t にいくつかの値を代入して直線をかいてみても通過領域の境界線まではわかりにくい。そこで，点 $(x,\ y)$ を通過する実数 t は存在するかどうかを考えて，$x,\ y$ の条件を導く。他にも x を固定して y のとり得る値の範囲を求める考え方などがある。

問題１２４について，条件と集合，２円の位置関係の復習でもある。

２．式と曲線　（問題１２５～１３４）

放物線，楕円，双曲線について理解しよう。

２次曲線の接線について理解しよう。

媒介変数表示について理解しよう。

極座標と極方程式について理解しよう。

放物線，楕円，双曲線の定義と方程式の標準形は確実に理解しておきたい。焦点，準線，頂点，漸近線などの用語の意味や計算についても理解しておきたい。

平行移動については，２次関数のところでも触れている。共有点の座標については，連立方程式を解けばよい。接線については導関数の計算が必要であるが，結論については円の接線の公式に近い形をしているので記憶しやすいだろう。

この分野は図形と方程式の円が楕円や双曲線になっていると考えればよい。

問題１３０について，離心率は必須の知識ではないが，軌跡を求める問題の練習になるだろう。

２次曲線を境界とする領域の問題は頻出ではないが，余裕があれば正領域と負領域の知識とあわせて理解しておきたい。

媒介変数表示について，円，楕円，双曲線は三角関数の相互関係

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$$

を参考にしておくと記憶しやすい。また，θ がそれぞれの図形のどこを表しているのかを理解しておくとよい。

２変数関数の条件式が円や楕円の方程式の形をしているときには，媒介変数を用いることで１変数の三角関数に帰着させることができる。

$4x^2+9y^2=36$ のとき，$x^2+2xy-2y^2$ の最大値および最小値を求めよ。

$\to\quad x=3\cos\theta,\ y=2\sin\theta$ とおくとよい。

極座標と極方程式は入試で頻出ではないが，極座標と直交座標との変換や極方程式で表される図形の基本は理解しておきたい。

３．ベクトル　（問題１３５～１４４）

ベクトルとその性質について理解しよう。

ベクトルの成分について理解しよう。

ベクトルの内積について理解しよう。

位置ベクトルについて理解しよう。

ベクトル方程式について理解しよう。

球面の方程式について理解しよう。

座標や成分を含んでいないものは平面と空間の区別なく用いることができる。

内積を用いた垂直条件は特に重要である。

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が零ベクトルでないとき，$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$

問題１３６について，（１）（２）の公式は証明できるようにしておきたい。（２）は空間では用いることができないが，（１）は平面と空間で用いることができる。

位置ベクトルの意味を理解しておくとともに，分点の位置ベクトル，重心の位置ベクトルを求める公式については説明できるようにしておきたい。

直線の“ベクトル方程式”の意味を理解しておきたい。
点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ を通り，$\overrightarrow{u}$ に平行な直線上の点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ の集合は

$L = \{\ \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{u},\ t$ は実数 $\}$

と表すことができる。この位置ベクトルを用いた関係式 $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{u}$ をベクトル方程式という。

定点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ を通り，$\overrightarrow{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は，直線上の点を $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ とすると $\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) = 0$ である。

円の半径と接線は垂直であることや円の直径の円周角が直角であることを利用すると内積の垂直条件より円の接線や直径の両端が与えられた円（空間では球）のベクトル方程式を導くことができる。

共線条件（平面と空間）は頻出であり，使い方も含めて理解しておきたい。
２点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}),\ \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ が異なるとき，

３点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}),\ \mathrm{B}(\overrightarrow{b}),\ \mathrm{C}(\overrightarrow{c})$ が一直線上にある
$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を満たす実数 k が存在する
$\iff$ $\overrightarrow{c} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ $(s + t = 1)$ を満たす実数 $s,\ t$ が存在する

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が一次独立，$s,\ t,\ s',\ t'$ を実数とするとき

$$s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=s'\overrightarrow{a}+t'\overrightarrow{b}\iff s=s',\ t=t'$$

である。（背理法によって証明できる。）

２直線の交点の位置ベクトルを求める問題では２通りで表して上の性質を用いるとよい。
また，問題によってはメネラウスの定理やチェバの定理を用いて解くことができる。

三角形の重心，外心，内心，垂心の位置ベクトルに関する問題も頻出である。重心，外心，内心，垂心の定義や性質を確認し，基本的な考え方を理解しておきたい。

空間の共面条件も頻出であり，使い方も含めて理解しておきたい。

$$\begin{aligned}&4\text{ 点 }\mathrm{A}(\overrightarrow{a}),\ \mathrm{B}(\overrightarrow{b}),\ \mathrm{C}(\overrightarrow{c}),\ \mathrm{D}(\overrightarrow{d})\text{ が同一平面上にある}\\ \iff\ &\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\text{を満たす実数 }s,\ t\text{ が存在する}\\ \iff\ &\overrightarrow{d}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}\ (\alpha+\beta+\gamma=1)\text{ を満たす実数}\alpha,\ \beta,\ \gamma\text{が存在する}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ が一次独立（いずれも零ベクトルではなく同一平面上にない），
$s,\ t,\ u,\ s',\ t',\ u'$ を実数とするとき

$$s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}+u\overrightarrow{c}=s'\overrightarrow{a}+t'\overrightarrow{b}+u'\overrightarrow{c}\iff s=s',\ t=t',\ u=u'$$

である。

ベクトル方程式 $|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}|=r$ で表される図形は，

中心 $C(\overrightarrow{c})$，半径 r の平面では円，空間では球面

である。
座標空間で中心の座標を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とすれば，球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

と表される。

入試において，四面体に関する問題が頻出である。
体積を求める問題の考え方は理解しておきたい。

４．複素数平面　（問題１４５～１５２）

複素数平面について理解しよう。

複素数の絶対値について理解しよう。

複素数の極形式について理解しよう。

回転移動について理解しよう。

ド・モアブルの定理について理解しよう。

複素数の n 乗根の計算について理解しよう。

複素数平面上の図形について理解しよう。

複素数 $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) に点 $(x,\ y)$ を対応させた平面を複素数平面という。
実数を直線に対応させる（実）数直線と同じである。
複素数の絶対値 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ が原点 O からの距離であることも実数のときと同じである。

次の性質は入試において重要である。

z が実数 $\Leftrightarrow$ $\overline{z}=z$

z が純虚数 $\Leftrightarrow$ $\overline{z}=-z,\ z\neq 0$

0 でない複素数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ に対して

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\ \arg z_1z_2=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2$$

が成り立つことは，加法定理を用いることで証明できる。

点 A(α) を中心に点 B(β) を θ 回転し，さらに点 A(α) からの距離を r 倍した点を C(γ) とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

が成り立つ。この形は三角形 ABC の形状などの問題にも現れる重要な式である。

ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\ (n\text{ は整数})$$

について，n が自然数のときは数学的帰納法で証明できる。
n が 0 や負の整数のときの証明も考えてみるとよいだろう。

複素数の n 乗根の計算方法を理解しておきたい。

複素数平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ について

$|z-\alpha|=|z-\beta| \iff$ 点 z は線分 AB の垂直二等分線をえがく

$|z-\alpha|=r\ (r>0) \iff$ 点 z は点 A を中心とする半径 r の円をえがく

この性質を用いた複素数平面上の点の軌跡を求める問題は頻出である。

3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ に対して

3 点 A, B, C が一直線上にある $\iff \arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=0,\ \pi \iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

2 直線 AB, AC が垂直に交わる $\iff \arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2},\ \iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

が成り立つ。これは回転移動の式を理解していれば容易である。

$z=x+yi$ (x, y は実数) とおくことで，座標平面（図形と方程式，式と曲線）の問題に帰着できる。

$|z|=2$ という条件があれば，$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ と極形式で表すことができる。

さまざまな“言いかえ”を考えることも大切である。

座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，平面ベクトルの $\overrightarrow{a}=(x,\ y)$，複素数 $z=x+yi$ を対応させることができるので，どの分野の知識を用いて解くと容易であるかを考えることも大切である。入試レベルの考え方としてあらためてまとめることにする。