１．微分と積分　（問題１５３～１６３）
・微分係数と導関数
・接線の方程式
・関数の増減と極値
・方程式・不等式への応用
・不定積分
・定積分
・面積

２．関数の極限　（問題１６４～１６８）
・関数の極限
・三角関数の極限
・関数の連続性
・中間値の定理

３．微分法とその応用　（問題１６９～１８３）
・積・商の導関数
・合成関数，逆関数の微分法
・いろいろな関数の導関数
・接線と法線
・関数の増減，曲線の凹凸
・方程式・不等式への応用
・速度と加速度

４．積分法とその応用　（問題１８４～２００）
・不定積分，定積分
・区分求積法
・定積分と不等式
・面積，体積
・曲線の長さ，速度と道のり

１．微分と積分　（問題１５３～１６３）

平均変化率，微分係数，導関数の定義を理解しよう。

接線の方程式の求め方を理解しよう。

関数の極大・極小について理解しよう。

不定積分，定積分の計算ができるようにしよう。

面積の求め方について理解しよう。

平均変化率，微分係数，導関数の定義をそれぞれ理解しておきたい。

$f(x)=x^n$ (n は自然数) の導関数が $f'(x)=nx^{n-1}$ であることは二項定理を用いて証明できる。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であるから，この点における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

である。

$f(x)$ が３次関数のとき，$f'(x)$ は２次関数であるから $f'(x)$ の符号変化を調べるためには放物線 $y=f'(x)$ のグラフをかけばわかりやすい。

３次関数 $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ に対し $f'(x)=3(x-1)^2$ であるから，$f'(x)=0$ を満たす x は存在するが $f'(x)$ の符号は変化しないので，極値も存在しないことに注意が必要。放物線 $y=f'(x)$ のグラフは x 軸と接している。

方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解は２曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点の x 座標に等しいことは重要な性質である。

問題１５８について，方程式 $x^3-3x^2-9x-a=0$ の実数解の個数は
曲線 $y=x^3-3x^2-9x-a$ と直線 $y=0$ (x 軸) の共有点の個数を考えてもよいが，
方程式を $x^3-3x^2-9x=a$ と変形して，曲線 $y=x^3-3x^2-9x$ と直線 $y=a$ の共有点の個数を考えるほうがよい。

不等式 $f(x)>g(x)$ の証明は $f(x)-g(x)$ の増減を調べて $f(x)-g(x)>0$ を示せばよい。

定積分の計算では速く正確に行うために工夫することが大切である。

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ が偶関数すなわち $f(-x) = f(x)$ のとき，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数すなわち $f(-x) = -f(x)$ のとき，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

などの性質を理解しておきたい。

問題１６０（３）について，１次式の定積分は三角形や台形の面積を考えればよい。

定積分の計算をすると面積が求められることの説明は容易ではないが，余裕があれば理解しておきたい。

放物線と放物線によって囲まれた部分の面積，放物線と直線によって囲まれた部分の面積は次の公式を用いることができる。

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

この公式は証明できるようにしておきたい。

数学 III の範囲では部分積分法によって証明すると容易である。

放物線とその接線を境界に含む領域の面積を求めるときに次の公式がよく用いられる。

$$\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C \ (C \text{ は積分定数})$$

定積分の上端または下端が α になっていることが多いので，計算が容易になる。

２．関数の極限　（問題１６４～１６８）

関数の極限について理解しよう。

いろいろな関数の極限について理解しよう。

関数の連続性について理解しよう。

連続関数の性質について理解しよう。

数列と同様に不定形の極限を求めるための変形方法を理解しておきたい。

極限を求めるときは，グラフをかいてみることも大切である。

右側極限，左側極限の意味を理解しておきたい。

$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

$2 < x < 3$ のとき $[x] = 2$ であるから， $\lim_{x \to 2+0} [x] = 2$（右側極限）

$1 < x < 2$ のとき $[x] = 1$ であるから， $\lim_{x \to 2-0} [x] = 1$（左側極限）

したがって， $\lim_{x \to 2} [x]$ は存在しない。

$x < 0$ のとき $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ であるから，$x \to -\infty$ のときは注意を要する。

$x = -t$ とおくと，$x \to -\infty$ のとき $t \to \infty$ となるので誤りにくい。

三角関数の極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

は基本であり，できれば証明も理解しておきたい。

三角関数の極限はこの式を使えないかどうかを考えることが重要である。

はさみうちの原理

a の近くで不等式 $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ が成り立ち，

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ ならば， $\lim_{x \to a} g(x) = \alpha$

は数列のときと同様に重要である。また，$x \to \infty$ などのときにも成り立つ。

関数の連続性について理解しておきたい。

連続関数の性質として中間値の定理について理解しておきたい。

入試レベルにおいては実数解の個数が“少なくとも 1 つ”かどうかよりも“いくつか”が問われることが多いので，関数の増減を調べることになる。

３．微分法とその応用　（問題１６９～１８３）

積・商の導関数について理解しよう。

合成関数の微分法，逆関数の微分法について理解しよう。

三角関数，対数関数，指数関数の導関数について理解しよう。

いろいろな導関数について理解しよう。

接線と法線の方程式の求め方を理解しよう。

平均値の定理について理解しよう。

関数の極大・極小について理解しよう。

曲線の凹凸について理解しよう。

方程式，不等式への応用について理解しよう。

速度・加速度について理解しよう。

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\Rightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で連続

この命題の証明は理解しておきたい。
また，逆は成り立たないが反例を考えてみるとよいだろう。

積の導関数，商の導関数の証明は理解しておきたい。
商の導関数は

$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'$ を定義にしたがって証明し，

$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right\}'$ として積の導関数の性質を用いるとよい。

合成関数の微分法の説明については余裕があれば理解しておきたいが，まず計算に慣れておくとよい。

三角関数の導関数については証明も理解しておきたい。$\sin x$ の導関数は定義にしたがって，$\cos x$ の導関数は三角関数の性質を用いて，$\tan x$ の導関数は $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ とみて商の導関数を用いて証明していることが多い。

対数関数，指数関数の導関数についても証明を理解しておきたい。対数関数の導関数について e の定義も理解しておく必要がある。指数関数の導関数は逆関数の微分法を用いる方法や対数微分法を用いる方法などがある。

$y=x^{\alpha}$ の導関数について，α が負の整数，有理数，実数と拡張しても $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ であることを説明できるようにしておきたい。

高次導関数，陰関数の微分法，媒介変数表示された関数の微分については，まず計算に慣れておくとよい。合成関数の微分法を理解していれば難しくはない。
余裕があれば，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ について，y は x の関数ではないにもかかわらず $\dfrac{dy}{dx}$ の計算ができるのはなぜか考えてみてもよいだろう。

接線の傾きは微分係数，法線の傾きは垂直条件からわかるので，導関数の計算ができれば容易である。

共通接線の問題では接点を共有しているのかいないのかを誤らないよう注意を要する。

平均値の定理について，証明は容易ではないので余裕があれば理解しておくとよい。まずは式の意味を理解すること。そして簡単な不等式の証明などで使えるようになること。ただし，中間値の定理の“閉区間 $[a,\ b]$ で連続”と同様に，閉区間 $[a,\ b]$ で連続かつ開区間 $(a,\ b)$ で微分可能といった適用条件を忘れないように注意する必要がある。

関数の増減，極値，凹凸，グラフなどは微分計算ができるかどうかであるが，符号変化の様子を調べるときには不等式を解くための変形と同様に積の形にするとわかることが多い。三角関数は符号を誤りやすいので注意を要する。

方程式の実数解の個数に関する問題について，数学 II の範囲と考え方は同じであるが，関数の増減を考えるとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ では結果が異なることがあるので，増減だけではなく極限を調べる必要がある。

不等式の証明について，数学 II の範囲と考え方は同じであるが，$f'(x)$ の符号変化の様子がわからないときは $f'(x)$ の増減を調べるために $f''(x)$ の符号変化の様子を調べる必要がある。

数直線上を運動する点 P の座標 x が時刻 t の関数として $x = f(t)$ と表されているとき

点 P の速度は $v = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

点 P の加速度は $\alpha = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$

座標平面上を運動する点については，x 軸方向，y 軸方向それぞれで考えればよい。

４．積分法とその応用　（問題１８４～２００）

基本的な積分計算について理解しよう。

置換積分法，部分積分法について理解しよう。

区分求積法について理解しよう。

定積分と不等式の性質について理解しよう。

面積の求め方について理解しよう。

体積の求め方について理解しよう。

曲線の長さの求め方について理解しよう。

速度と道のりについて理解しよう。

不定積分について，微分の逆演算として基本公式は確実に理解しておきたい。

合成関数の微分法に対応する置換積分法について

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \text{ (以下，}C\text{ は積分定数)}$$

の形をしたもの，たとえば

$$\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C$$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

などは速い計算が求められる。

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \qquad (g(x) = u)$$

の形をしたもの，たとえば

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2}(x^2)' dx = e^{x^2} + C$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

さらに

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$$

の形をしたもの，たとえば

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \log(x^2+1) + C$$

$$\int \tan x dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + C$$

なども置換せずに暗算で計算できるようにしておきたい。

積の導関数に対応する部分積分法について

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x\log x - x + C$$

は頻出であるから公式として記憶しておきたい。

分数式や三角関数の積分は基本的な変形手順を理解しておきたい。

（部分分数分解や半角公式，和と積の変換公式など。）

定積分の置換積分法について

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \ (a > 0)$$

は四分円の面積であり，積分計算をせずに $\dfrac{1}{4}\pi a^2$ と求められる。また

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}$$

は頻出であり記憶しておきたい。

区分求積法の特別な場合

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

は図をかいて式の意味を理解しておきたい。

長方形の面積の和について，横の長さを限りなく 0 に近づけたときの極限を考えているが，中学受験で扱う面積図（縦を速さ，横を時間とすると，面積が距離を表す。）を理解していれば区分求積法の理解も難しくはないだろう。

定積分と不等式

$f(x)$, $g(x)$ が連続で，閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

等号は，常に $f(x) = g(x)$ であるときに限って成り立つ。

は入試でよく用いられる。

面積，体積については，余裕があれば公式の証明も理解しておきたいが，切り口の長さや面積を積分すればよいことを理解しておくとよいだろう。

曲線の長さについても同様に短い線分の長さの和をイメージできれば公式の記憶は難しくないだろう。

媒介変数表示された図形 $x = f(t)$, $y = g(t)$ について面積や体積を求めるときは

合成関数 $y = g(f^{-1}(x)) = (g \circ f^{-1})(x)$ の積分を考えることになるので置換積分法により計算できる。