１．さまざまな分野の特徴をつかむ

図形の問題ではどの分野の性質を用いるかによって難易度がかわることがある。

(i)　座標の利用

図形の性質の証明をするときには，初等幾何の範囲で証明できるものでも座標を設定することによって簡潔になる場合もある。

例 1
三角形 ABC の各辺の垂直二等分線は 1 点で交わることについて
$\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(-c,\ 0),\ \mathrm{C}(c,\ 0)\ (b>0,\ c>0)$ とおくと，
線分 AB の垂直二等分線の方程式は $y-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{a+c}{b}\Big(x-\dfrac{a-c}{2}\Big)$,
線分 AC の垂直二等分線の方程式は $y-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{a-c}{b}\Big(x-\dfrac{a+c}{2}\Big)$ であり，
２直線の交点の座標は $\Big(0,\ \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\Big)$ である。
この点は線分 BC の垂直二等分線 $x=0$（y 軸）上にある。
※実際は座標を用いずに，垂直二等分線の性質（２点からの距離が等しい）を用いるほうが容易である。

例 2
三角形 ABC において，BC の中点を M とするとき
$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$
が成り立つことについて
$\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(-c,\ 0),\ \mathrm{C}(c,\ 0)\ (b>0,\ c>0)$ とおくと，
$\mathrm{M}(0,\ 0)$ であり，(左辺)=(右辺)$=2(a^2+b^2+c^2)$ となる。

(ii)　ベクトルの利用

座標平面上の直線を考えるとき，軸に平行な場合を分けることがあるが，ベクトルを用いるとその必要がない。また，内積の性質はよく用いられる。

例 3

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ と直線 $l : ax + by + c = 0$ の距離について

点 A から直線 l に下した垂線を AH とし，$\mathrm{H}(x_0,\ y_0)$ とする。また，直線 l の法線ベクトルの 1 つは $\overrightarrow{n} = (a,\ b)$ とおける。$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{n}$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{\mathrm{AH}}||\overrightarrow{n}|$ が成り立ち，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = -(ax_1 + by_1 + c)$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

例 4

中心 $\mathrm{C}(\overrightarrow{c})$，半径 r の円周上の点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ における円の接線のベクトル方程式について

接線上の点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{0}$ より $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

これを変形して $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}) = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$

となるから

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) = r^2$$

が成り立つ。さらに，$\mathrm{C}(a,\ b)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

となる。

※接線のベクトル方程式は正射影ベクトルの知識があれば容易である。

（iii）　複素数平面の利用

回転移動に関しては，複素数の極形式を用いることができる。

例 5

複素数平面上の正三角形 ABC について，$\mathrm{A}(1 + i)$, $\mathrm{B}(3 + 2i)$ のとき，

点 C を表す複素数 γ は，$\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ とおくと

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

より

$$\gamma = \left(2 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{3}\right)i \text{（複号同順）}$$

である。

２．面積，体積

面積や体積を求めるとき，さまざまな分野の性質を活用することができる。

(i)　三角形の面積

小中学校レベルの「(底辺) $\times$ (高さ) $\div 2$」は基本であるが，三角比を用いたものやベクトルを用いたものなど問題によって使い分けることが大切である。また，四角形など多角形の面積を求めるときも，いくつかの三角形に分割することで面積を求めることができる。

例 6
三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=5,\ \mathrm{CA}=6,\ \mathrm{AB}=7$ のとき
余弦定理により $\cos A=\dfrac{5}{7}$ であるから
面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$

ヘロンの公式によって簡単に面積を求めることはできるが，公式の証明も理解し検算に用いることが理想である。公式の証明問題も出題されている。試験のとき時間がないようであれば，答えだけでも求めるために用いることはやむを得ない。

例 7
三角形 ABC において，$\mathrm{A}(-4,\ 3),\ \mathrm{B}(-1,\ 2),\ \mathrm{C}(3,\ -1)$ のとき
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(7,\ -4)$ であるから，面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot 65-25^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2(2\cdot 13-5^2)}=\frac{5}{2}$$

$$\left(\text{または}\ \frac{1}{2}\mid 3\cdot(-4)-(-1)\cdot 7\mid=\frac{5}{2}\right)$$

(ii)　定積分と面積

直線や円弧で囲まれた部分を除いて，面積を計算するときは定積分の計算によることが多い。

例８

曲線 $y=\log x$，直線 $x=e$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_1^e \log x dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^e = 1$$

また，次のように考えてもよい。

$$e\cdot 1 - \int_0^1 e^y dy = \Big[e^y\Big]_0^1 = 1$$

(iii)　体積

柱体や錐体は底面積と高さがわかれば計算できる。ベクトルを利用すると容易になることもある。球は半径がわかれば計算できる。それ以外は定積分の計算によることが多い。（球などの体積公式も積分計算によって導くことができる。）

例９

１辺の長さが a である正八面体の体積について

合同な２つの四角錐に分けると，この四角錐の底面は１辺の長さが a の正方形，高さはこの正方形の対角線の長さの $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$2\times\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

例１０

曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに１回転してできる回転体の体積について

$$\pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx = \frac{\pi^2}{2}$$

※ $y=\cos 2x$ のグラフを考えれば $\displaystyle\int_0^\pi \cos 2x dx = 0$ は明らか。

３．軌跡と領域

与えられた条件を満たす点の集合を求める問題がさまざまな分野でみられる。２文字 $a,\ b$ の関係式を点 $(a,\ b)$ の集合として図示したり，直線などの通過領域を図示したりする問題や図示した領域の面積を求める問題もある。

(i)　座標平面上の軌跡と領域

軌跡の求め方の基本は，軌跡を求める点を $(X,\ Y)$ とおいて，与えられた条件を $X,\ Y$ で表せばよい。同値変形に注意をしないと条件を満たさない点を含んでしまうことがある。通過領域の問題は方程式の実数解条件を考えればよい。（他にも方法はある。）

例１１

２点 $\mathrm{F}(4,\ 0),\ \mathrm{F}'(-4,\ 0)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡について

点 P の軌跡は２点 F, F$'$ を焦点とする楕円であり，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ とおくと，

２焦点からの距離の和が 10 であることから $a=5$，焦点の座標から $b=3$ となり，

楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

例１２

t を実数とする。直線 $l: y=2tx-t^2$ が通過する領域について

直線 l が点 $(X,\ Y)$ を通るとすると，$Y=2tX-t^2 \iff t^2-2Xt+Y=0$ をみたす実数 t が存在することから，$\dfrac{(\text{判別式})}{4}=(-X)^2-Y \geqq 0$ すなわち $Y \leqq X^2$

よって，放物線 $y=x^2$ の下側（境界線上を含む）

(ii)　複素数平面上の軌跡と領域

複素数平面上の異なる２点 $\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta)$ に対して，

$|z-\alpha|=r\ (r>0) \Leftrightarrow$ 点 A を中心とする半径 r の円

$|z-\alpha|=|z-\beta| \Leftrightarrow$ 線分 AB の垂直二等分線

が基本となる。

例１３

方程式 $2|z-2i|=|z+i|$ について

両辺平方して変形すると $4(z-2i)(\overline{z}+2i)=(z+i)(\overline{z}-i) \iff |z-3i|=2$

であるから，点 z の軌跡は中心 $3i$，半径 2 の円である。

$\mathrm{A}(2i),\ \mathrm{B}(-i),\ \mathrm{P}(z)$ とすると，$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$ であるから

点 P の軌跡はアポロニウスの円であり，AB を $1:2$ に内分する複素数 i と $1:2$ に外分する複素数 $5i$ を直径の両端とする円となる。

例１４

不等式 $2|z-2i|<|z+i|$ について

両辺平方して変形すると $|z-3i|<2$ となるので，

点 z の集合（領域）は中心 $3i$，半径 2 の円の内部である。

（iii）　ベクトルを用いた軌跡と領域

位置ベクトルも点を表しているので，座標や複素数と同様に考えられる。

例１５

$s,\ t$ を実数とする。異なる 2 点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}),\ \mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ と点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ に対して，

$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b},\ s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$ とする。

$s=1-t$ より，$\overrightarrow{p}=(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b},\ 0\leqq t\leqq 1$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ 0\leqq t\leqq 1$

であるから，点 P の軌跡は線分 AB である。（線分 AB のベクトル方程式）

※ $s\geqq 0,\ t\geqq 0$ の条件を除けば t は実数全体となり，“直線”AB になる。

例１６

一直線上にない 3 点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a}),\ \mathrm{B}(\overrightarrow{b}),\ \mathrm{C}(\overrightarrow{c})$ に対して，点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ が次の式を満たしている。

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}|<1$$

このとき，$|3\overrightarrow{p}-(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})|<1 \iff \left|\overrightarrow{p}-\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{3}\right|<\dfrac{1}{3}$

より，点 P は三角形 ABC の重心を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円の内部を動く。

４．図形と最大・最小

「関数と微積分」で触れた最大・最小問題について，図形の性質を活用することもできる。差の絶対値は２点間の距離と考える。

(i)　1 変数関数の最大・最小と数直線

x を数直線上の点と考える。

例１７
関数 $y = |x-1| + |x-2|$ について
数直線上の 1 からの距離と 2 からの距離の和であるから，$1 \leqq x \leqq 2$ のとき最小値 1 をとる。

(ii)　2 変数関数の最大・最小と座標平面

座標平面上の図形の方程式と考えたり，円や楕円などの媒介変数を利用したり，さまざまな方法がある。

例１８
$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 12,\ 2x+y \leqq 8$ を満たすとき，$x+2y$ について
$x+2y=k$ とおくと，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線を表し，不等式を満たす領域と共有点をもつ条件を考えればよい。
２直線 $2x+3y=12,\ x=0$ の交点 $(0,\ 4)$ を通るとき最大値 8，２直線 $x=0,\ y=0$ の交点 $(0,\ 0)$ を通るとき最小値 0 である。

例１９

$2x^2+y^2=2$ のとき，$x+y$ について

$x+y=k$ とおくとき，楕円 $2x^2+y^2=2$ と直線 $x+y=k$ が共有点をもつ条件を考えればよい。

$y=k-x$ を $2x^2+y^2=2$ に代入して $2x^2+(k-x)^2=2 \iff 3x^2-2kx+k^2-2=0$

$\dfrac{(\text{判別式})}{4}=(-k)^2-3(k^2-2) \geqq 0$ より $-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$

最大値は $\sqrt{3}$，最小値は $-\sqrt{3}$ である。

例２０

$4x^2+9y^2=36$ のとき，$2x^2+xy+3y^2$ について

$x=3\cos\theta,\ y=2\sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}2x^2+xy+3y^2 &= 18\cos^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+12\sin^2\theta \\ &= 3\sin 2\theta+3\cos 2\theta+15 \\ &= 3\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+15\end{aligned}$$

最大値は $15+3\sqrt{2}$，最小値は $15-3\sqrt{2}$ である。

（iii）　複素数平面と最大・最小

条件式が図形の方程式を表していて，関数が定点からの距離を表していることが多い。

例２１

複素数 z が $|z-3+2i|=2$ を満たしているとき，$|z-2i|$ について

$|z-3+2i|=2$ は中心 $3-2i$，半径 2 の円を，$|z-2i|$ は $2i$ からの距離を表している。

$3-2i$ と $2i$ の距離は $|(3-2i)-2i|=5$ であるから，$|z-2i|$ の最大値は 7，最小値は 3 である。

※ $z=x+yi$ (x，y は実数) とおくことにより，(ii) の場合に帰着される。

例２１では，$x=3+2\cos\theta,\ y=-2+2\sin\theta$ とおくと，

$|z-2i|^2=(3+2\cos\theta)^2+(-4+2\sin\theta)^2$ の最大値は 49，最小値は 9 となる。