

## 1. 関数と数列

### (i) 関数と数列

関数  $f(x) = x^2 - 2x$  と数列  $a_n = n^2 - 2n$  の違いは何か？

関数は変数  $x$  が実数であり，数列は変数  $n$  が自然数であること。

もちろん，関数で定義域の区間が正の実数値に制限されたり，数列で変数が 0 や負の整数を含むこともあるが，数列の  $n$  に無理数を代入することはない。一方で，文字に数値を代入して計算するという点では関数も数列も同じである。

### (ii) 数列の最大・最小

数列の階差について， $b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n}$  と見ると，

$$\text{微分係数 } f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

と考えていることは同じである。

したがって，関数の最大・最小では導関数の符号変化から増減を調べるが，数列の最大・最小でも階差数列の符号変化から増減を調べることができる。

#### 例 1

初項が 25，公差が  $-4$  である等差数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  について

$$a_n = -4n + 29 \quad (n \geq 1), \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \text{ であり，}$$

数列  $\{S_n\}$  の階差数列が  $\{a_n\}$  であるから，

$$a_n > 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 7 \text{ のとき数列 } \{S_n\} \text{ は増加，}$$

$$a_n < 0 \Leftrightarrow n \geq 8 \text{ のとき数列 } \{S_n\} \text{ は減少。}$$

よって，数列  $\{S_n\}$  は  $n = 7$  のとき最大となる。

数列と関数が対応しているからといって，数列の式を微分することはできない。

(導関数の定義を考えれば，自然数変数で微分できないことは明らかである。)

## 例 2

数列  $\{a_n\}$  の一般項が  $a_n = n^3 - 6n^2 + 5$  であるとき、 $a_n$  の最小値について  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$  ( $x > 0$ ) とおく (定義域が正の実数である関数に置きかえる) と、 $f'(x) = 3x(x - 4)$  より  $f(x)$  は最小値  $f(4) = -27$  をとる。

よって、 $a_n$  の最小値は  $a_4 = -27$  である。

※  $(a_n)' = 3n(n - 4)$  や  $f(n) = n^3 - 6n^2 + 5$  とおいて  $f'(n)$  などとしてはいけない。

## (iii) 数列の和

数列  $\{a_n\}$  に対し、 $a_n = b_{n+1} - b_n$  を満たす数列  $\{b_n\}$  を考える。このとき

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$$

である。関数  $f(x)$  に対し、 $F'(x) = f(x)$  を満たす関数  $F(x)$  を考えると

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

であることと同じである。

## 例 3

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

※  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  が階差の形になっている。上のまとめに合わせると

$\left( -\frac{1}{k+1} \right) - \left( -\frac{1}{k} \right)$  と変形して  $b_k = -\frac{1}{k}$  であるが、計算上その必要はない。

## 例 4

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

## 2. 確率と数列

### (i) 確率と漸化式

$n$  回くり返す操作や  $n$  個の順列などにおいて、 $n$  回（個）と  $(n+1)$  回（個）の関係式すなわち漸化式を作るとよいことがある。

#### 例 5

1 個のさいころを  $n$  回投げるとき、3 の倍数の目が偶数回出る確率  $p_n$  について  $(n+1)$  回目までに 3 の倍数が偶数回出るのは、 $n$  回目までに 3 の倍数が偶数回出ていて  $(n+1)$  回目に 3 の倍数が出ない場合と  $n$  回目までに 3 の倍数が奇数回出ていて  $(n+1)$  回目に 3 の倍数が出る場合があり、乗法定理と加法定理により

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{3} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$$

が成り立つ。この漸化式より

$$p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

である。

さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$  である。

$n = 1, 2$  のときを求める  $\rightarrow$  漸化式を作る  $\rightarrow$  一般項を求める  
というパターンが多く、最後に極限を求めさせることもある。

### (ii) 確率の最大・最小

自然数  $n$  に関する場合の数や確率は数列となるが、負でない実数値をとるので 0 とならない場合は次の言い換えができる。

$$a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

場合の数や確率は積（商）の形になっていることが多いので、差より比で考えたほうが容易である。

例 6

1 個のさいころを 10 回投げるとき、3 の倍数の目が何回出る確率が最大であるかについて

3 の倍数の目が  $k$  回出る確率  $p_k$  ( $0 \leq k \leq 10$ ) は

$$p_k = {}_{10}C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} = \frac{10! \cdot 2^{10-k}}{k!(10-k)! \cdot 3^{10}}$$

であるから、 $1 \leq k \leq 9$  のとき

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{10! \cdot 2^{9-k}}{(k+1)!(9-k)! \cdot 3^{10}} \cdot \frac{k!(10-k)! \cdot 3^{10}}{10! \cdot 2^{10-k}} = \frac{10-k}{2(k+1)}$$

であり

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 2$$

より  $p_0 < p_1 < p_2 < p_3 > p_4 > p_5 > \cdots > p_{10}$  が成り立ち、

3 回出る確率が最大である。

$p_k$  について  $k$  を実数変数  $x$  におきかえて微分をしようとしても容易ではない。変数  $k$  が整数であるから、数列の最大・最小の考え方すなわち階差を利用した考え方をしている。さらに、積の形をしているので、階差ではなく比を用いた方法で数列の増減を調べている。

### 3. さまざまな分野と数列

#### (i) 整数と数列

整数値をとる数列  $\{a_n\}$  に対し、一の位を求める問題やガウス記号を用いた整数部分に関する問題などが見られる。合同式に関する知識があれば答案もまとめやすい。

#### 例 7

2 次方程式  $x^2 - 4x + 1 = 0$  の 2 解  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) について

$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$  より  $\alpha^2 + \beta^2 = 14$  であるから、

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n) = 4(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)$$

となり、帰納法の仮定により  $\alpha^n + \beta^n$  は偶数となる。

また、 $0 < \beta = 2 - \sqrt{3} < 1$  より  $0 < \beta^n < 1$  であるから、 $[\alpha^n]$  は奇数である。

#### 例 8

$3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243$  であるから、自然数  $n$  に対して  $3^n$  の一の位は 3, 9, 7, 1 をくり返すことが推測できる。実際、 $3^{n+4} - 3^n = 80 \cdot 3^n$  (差が 10 の倍数) より  $3^{n+4}$  と  $3^n$  の一の位は等しいことがわかり、たとえば、 $3^{2021}$  の一の位は 3 である。

※合同式を用いると、 $\text{mod } 10$  として  $3^{2021} = 3 \cdot (3^4)^{505} \equiv 3 \cdot 1^{505} = 3$  である。

#### (ii) 図形と数列

円や相似な三角形の面積や長さなどに関する問題では等比数列や無限級数の知識が求められることがある。

#### 例 9

半径 1 の円  $C_1$  に内接する正三角形を  $T_1$  とし、正三角形  $T_1$  に内接する円を  $C_2$  とする。以下、この操作をくり返し、円  $C_n$  に内接する正三角形を  $T_n$  とし、正三角形  $T_n$  に内接する円を  $C_{n+1}$  とする。

円  $C_n$  の半径を  $r_n$  とおくと、 $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n, r_1 = 1$  より  $r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  であるから、

$$\text{円 } C_n \text{ の面積は } \pi r_n^2 = \frac{\pi}{4^{n-1}}, \text{ 正三角形 } T_n \text{ の面積は } \frac{1}{2}r_n^2 \sin \frac{2\pi}{3} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$$

(iii) 定積分と数列

区分求積法，積分漸化式など定積分と数列に関する出題もよく見られる。

例 1 0

区分求積法の式を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

である。この例では，和の計算を先に行ってから極限計算を行ってもよい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}$$

である。

例 1 1

$I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$  について

部分積分法を用いると

$$I_n = \left[ x(\log x)^n \right]_1^e - \int_1^e x \cdot n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx = e - nI_{n-1}$$

であるから， $I_2, I_3, \dots$  と順に定積分の値を求めることができる。

例 1 2

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$  について

$$\begin{aligned} I_{n+2} + I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (\tan^2 x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (\tan x)' dx \\ &= \left[ \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

例 1 2 について， $\tan x$  を含む不等式が成り立つことを証明し，はさみうちの原理を用いると  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  を導くことができる。

例 1 2 の  $n$  を  $2k-2$  とすると，次の無限級数を考えることができる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (I_{2k} + I_{2k-2}) \\ &= (I_2 + I_0) - (I_4 + I_2) + (I_6 + I_4) + \dots + (-1)^{n-1} (I_{2n} + I_{2n-2}) \\ &= I_0 + (-1)^{n-1} I_{2n} \end{aligned}$$

より，
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = I_0 = \frac{\pi}{4} \quad (\tan^0 x = 1 \text{ とする})$$

#### 4. 規則性を見つける

##### (i) 数えてみる

場合の数や確率においては、数え上げることによって規則性を見つけられることがある。

##### 例 1 3

100 円硬貨 3 枚, 50 円硬貨 2 枚, 10 円硬貨 2 枚の一部または全部を用いてちょうど支払える金額について

10 円, 20 円, 50 円, 60 円, 70 円, 100 円, 110 円, 120 円, 150 円, ……

100 円硬貨と 50 円硬貨で 0 円から 400 円まで 50 の倍数の金額を作ることができ, それに 10 円硬貨で 0 円, 10 円, 20 円をそれぞれ加えたものを考えればよいことがわかる。したがって, 0 円の場合を除いて積の法則により  $9 \times 3 - 1 = 26$  (通り)

##### (ii) 並べてみる

数列においては, 初項から順に並べてみると規則性を見つけられることがある。

##### 例 1 4

$a_n = [\log_3 n]$  について

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, \dots, a_8 = 1, a_9 = 2, a_{10} = 2, \dots, a_{26} = 2, a_{27} = 3, \dots$  より

0, 0,  $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{6 \text{ 個}}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{18 \text{ 個}}, 3, \dots$

であるから, 群数列の問題であることがわかる。

(iii) 数値を代入してみる

文字に数値を代入してみることによって結論を推測することができる。また、数列の一般項や和の計算のあとの検算にも活用できる。

例 1 5

不等式  $2^n > n^2$  を満たす自然数  $n$  について

$n = 1$  のときは成立。 $n = 2, 3, 4$  のときは不成立。 $n = 5$  のときは成立。 $n > 5$  のときもすべて成り立つのではないかと推測。5 以上の自然数  $k$  に対して、

$$2^{k+1} - (k+1)^2 = 2 \cdot 2^k - (k+1)^2 > 2 \cdot k^2 - (k+1)^2 = (k-1)^2 - 2 > 0$$

より 5 以上の自然数  $n$  に対して  $2^n > n^2$  が成り立つ。(数学的帰納法)

よって、不等式の解は  $n = 1, n \geq 5$  である。

ここまでに提示したもの以外にも「データの分析と数列」、「図形と確率」、「複素数平面と数列、整数」などさまざまな分野の内容が融合されている。比較的典型的なパターンとして認識されている例をあげたが、実際の入試問題では高度な思考力を問われるものも少なくない分野である。

しかし、そのような高難度の問題を解くためにも基本事項と頻出・典型問題の理解が重要であることは言うまでもない。